BAB II
ACUAN TEORITIK

A. Studi Transposisional

Studi transposisional adalah pendekatan penelitian yang meneliti bagaimana suatu konsep, teori, atau metode berpindah, diterapkan, atau diadaptasi dari satu konteks ke konteks lain. Pendekatan ini sering digunakan dalam pendidikan untuk menganalisis bagaimana suatu pengetahuan berubah dari bentuk ilmiahnya menjadi bentuk yang diajarkan di dalam kelas.

Proses pembelajaran menuntut guru, perancang kurikulum, dan penulis buku teks untuk mampu mengatasi dua permasalahan utama, yakni pengelolaan kurikulum dan pengelolaan kelas (Paun, 2006). Manajemen kurikulum berfokus pada bagaimana mengkonstruksi pengetahuan ilmiah menjadi objek pengajaran di sekolah atau di kelas (pengetahuan yang harus diajarkan dan pengetahuan yang diajarkan), karena matematika sekolah pada dasarnya mengembangkan matematika ilmiah (Bosch & Gascon, 2006; Paun, 2006; Chevallard & Bosch, 2014).

Proses bagaimana pengetahuan ilmiah ditransposisikan menjadi pengetahuan dalam konteks sekolah atau kelas disebut transposisi didaktis (Brousseau, 2002; Bosch & Gascon, 2006; Chevallard & Bosch, 2014). Proses transposisi ini penting untuk memfasilitasi siswa dalam mempelajari pengetahuan ini dan untuk memastikan tidak ada kesenjangan antara pengetahuan yang dipelajari siswa dan pengetahuan ilmiah. Transposisi didaktis hadir untuk memberikan gambaran umum terhadap fenomena praktik pendidikan yang terjadi, mulai dari proses transposisi pengetahuan dari pengetahuan ilmiah ke pengetahuan yang dipelajari hingga dampak proses transposisi terhadap pembelajaran (Paun, 2006; Postelnicu, 2017; Lundberg & Kilhamn, 2018). Dengan mencermati proses transformasi didaktis ini, para praktisi pendidikan khususnya guru akan melihat banyak fenomena, salah satunya adalah fenomena yang menunjukkan tujuan pembelajaran matematika bukan hanya untuk transfer ilmu pengetahuan kepada siswa tetapi juga sebagai sarana bagi siswa untuk mengkonstruksi pengetahuannya.

Studi transposisional adalah pendekatan dalam penelitian atau pembelajaran yang menekankan pada transfer atau penerapan pengetahuan, keterampilan, atau konsep dari satu konteks ke konteks lain. Dalam penelitian ini studi transposisional ini merupakan proses transposisi dari pengalaman belajar melalui tranlasi representasi matematis masalah kovariasional pada konteks matematika lanjut dalam perkuliahan menjadi desain tranlasi representasi matematis masalah kovariasional pada konteks matematika sekolah khususnya pada topik matriks kelas XI SMA Negeri 1 Semparuk.

B. Kemampuan Translasi Representasi

Zulianto & Budiarto (2020) menerangkan bahwa kemampuan translasi representasi adalah kecakapan siswa dalam mengubah suatu representasi matematis yang diberikan (representasi sumber) ke bentuk representasi matematis yang diminta (representasi target). Sedangkan menurut Pratiwi (dalam Awi dkk., 2021) kemampuan representasi adalah kemampuan seseorang menyajikan gagasan matematika yang meliputi penerjemahan masalah atau ide-ide matematis ke dalam interpretasi berupa gambar, persamaan matematika, maupun kata-kata. Hal ini pun sejalan dengan Bosse dkk (2014) yang menyatakan bahwa kemampuan translasi representasi dalah keterampilan seseorang dalam mengubah atau mentransformasikan suatu bentuk representasi ke bentuk lainnya tidak hanya memerlukan kemampuan untuk mengenali hubungan dan konsep yang ada dalam representasi awal, tetapi juga kemampuan untuk menghubungkan bagian-bagian penting dari informasi tersebut ke elemen yang sesuai dalam representasi tujuan.

Sedangkan Rahmawati dkk (2017) menyatakan bahwa kemampuan translasi representasi adalah kemampuan untuk mengubah suatu bentuk representasi ke bentuk representasi lainnya dalam proses berpikir konseptual dan matematis. Dari pemaparan data diatas, dapat disimpulkan bahwa kemampuan translasi representasi adalah keterampilan kognitif siswa dalam mentransformasikan suatu bentuk representasi matematis (sumber) ke bentuk representasi lain (target) dengan tetap mempertahankan kesesuaian konsep dan informasi yang terkandung di dalamnya.

Dalam proses translasi representasi, terdapat banyak ahli yang sudah mengemukakan langkah-langkah, strategi, cara atau indikator yang dapat digunakan untuk memahami bagaimana seseorang mentransformasikan informasi dari satu bentuk representasi ke bentuk lainnya. Adapun Bosse dkk, (2014) menyatakan bahwa dalam proses translasi terdapat empat indikator yaitu

1. Membongkar Sumber (*Unpacking The Source*)

Pada tahap ini, siswa harus mengungkapkan informasi yang terkandung di representasi sumber dan menyebutkan representasi target yang diminta berdasarkan representasi sumber.

2. Koordinasi Awal (*Preliminary Coordination*)

Pada tahap ini, siswa menentukan strategi atau langkah awal pembentukan representasi target yang akan diinginkan.

3. Mengonstruksi Target (*Constructing Thr Target*)

Pada tahap ini, siswa menghasilkan atau membentuk representasi target yang diinginkan sebagai penyelesaian dari representasi sumber.

4. Menentukan Kesetaraan (*Determining Equivalence*)

Pada tahap ini, siswa mempertimbangkan kembali kesesuaian antara representasi target dengan representasi sumber. Kemampuan translasi representasi adalah kecakapan siswa dalam menyelesaikan masalah melalui analisa informasi sumber kemudian menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan representasi target yang sesuai dengan kemampuan pemahaman konsep mereka. Kemampuan translasi representasi diukur melalui kemampuan siswa dalam menginterpresentassikan, mentransformasikan, dan menghubungkan berbagai representasi matematis, seperti bentuk verbal, grafik, tabel, dan simbolik. Dalam penenlitian ini menggunakan 3 indikator translasi representasi matematis yaitu sebagai berikut:

a. Translasi representasi verbal ke simbol, tabel, dan grafik
b. Translasi representasi grafik ke verbal, simbol, dan tabel

c. Translasi representasi tabel ke verbal, simbol, dan grafik

C. Kovariasional

Rahman, dkk. (2023) menerangkan bahwa masalah kovariasional didefinisikan sebagai tugas kovariasi yang berkaitan dengan peristiwa dinamis yang melibatkan hubungan antara dua variabel. Sedangkan menurut Carlson (Sandie & Susiaty, 2020) masalah kovariarional adalah Aktivitas kognitif yang melibatkan koordinasi antara dua kuantitas yang berubah sambil memperhatikan bagaimana perubahan keduanya saling berhubungan. Dari pemaparan data diatas, dapat disimpulkan bahwa masalah kovariasional adalah masalah yang berkaitan dengan hubungan antara dua variabel yang berubah secara bersamaan dalam suatu peristiwa dinamis, di mana diperlukan koordinasi untuk memahami bagaimana perubahan satu variabel mempengaruhi variabel lainnya.

D. Matriks

1. Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom yang diapit oleh dua kurung siku sehingga berbentuk empat persegi panjang atau segiempat, dengan panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris. Unsur-unsur atau anggota dalam matriks berupa bilangan yang sering disebut dengan entri. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut *vektor kolom*, sedangkan yang terdiri dari satu baris disebut *vektor baris*. Suatu matriks A yang terdiri dari m baris dan n kolom disebut matriks A berdimensi (ukuran) $m \times n$. Matriks dilambangkan dengan huruf besar sedangkan entri (elemen) dilambangkan dengan huruf kecil

$$A_{m\times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah suatu matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama banyaknya. Sebuah matriks A dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks persegi berorde n dengan entri-entrinya a_{11}, a_{22}, a_{33}, … , $a_{n\times n}$ berada pada diagonal utama matriks A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

b. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks persegi yang semua bernilai nol, kecuali pada diagonal utamanya. Namun, pada diagonal utama juga dapat bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0\ untuk\ i \neq j \\ a_{ii}, untuk\ i = j \end{cases}$$

$$\text{dengan } i, j = 1,2, \dots, n$$

c. Matriks Skalar

Matriks skalar adalah suatu matriks persegi yang unsur-unsurnya bernilai sama pada diagonal utamanya, sedangkan unsur lainnya bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Di mana $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$

d. Matriks Identitas (*I*)

Matriks identitas adalah suatu matriks skalar yang nilai unsur-unsur diagonal utamanya sama dengan satu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas merupakan matriks persegi yang semua entri dibawah diagonal utama bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

f. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah merupakan matriks persegi yang semua entri di atas diagonal utama bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

g. Matriks Nol

Matriks nol merupakan matriks yang semua entrinya adalah bilangan nol. Jika ordo dipentingkan dalam matriks nol ini, maka dapat ditulis beserta banyak baris dan kolomnya.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh: $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

h. Matriks Invers

Matriks persegi A disebut mempunyai invers jika terdapat matriks B yang sedemikian rupa sehingga memenuhi $BA = AB = I$. Untuk perlambangan, invers matriks A biasanya dinyatakan oleh A^{-1}. Untuk matriks berordo 2×2 :

Jika $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

2. Operasi Matriks

a. Penjumlahan

Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan (Anton, 2000: 47).

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

1) Komutatif : $A + B = B + A$
2) Asosiatif : $A + (B + C) = (A + B) + C$

b. Perkalian

1) Perkalian matriks dengan skalar

Jika A adalah sebarang matriks dan k adalah sebarang skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A oleh k (Anton, 2000: 48).

$k(A + B) = kA + kB = (A + B)k$, dengan k = skalar.

2) Perkalian matriks dengan matriks

Jika A adalah matriks $m \times k$ dan B matriks $k \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut (Anton, 2000) :

a) Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari perkalian AB, memilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B.
b) Mengalikan entri-entri yang berpadanan dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian menambahkan hasil kali yang dihasilkan.

Sifat-sifat perkalian matriks :

a) Asosiatif : $A(BC) = (AB)C$
b) Distributif terhadap penjumlahan : $A(B + C) = AB + AC$

c. Transpose

Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose A dinyatakan oleh A^T dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari A, yaitu kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya (Anton, 2000: 55).

$$A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat operasi transpose adalah (Anton, 2000: 69) :

a) $((\boldsymbol{A})^t)^t = A$

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$ dan $(A - B)^t = A^t - B^t$

c) $(kA)^t = kA^t$, dengan k adalah skalar

d) $(AB)^t = B^t A^t$

d. Determinan

Determinan suatu matriks persegi A dilambangkan dengan det A yaitu bilangan yang diperoleh dari unsur-unsur A dengan perhitungan tertentu seperti di bawah ini (Susanta, 1994: 36) :

a) Untuk $A_{1\times 1} = [a]$ maka det $(A) = a$

b) Untuk $A_{n\times n} = (\ a_{ij}\ )$ maka det $(A) = \sum_{i=1}^{n} -1^{i+j}\ a_{ij}\ \det(M_{ij})$ dengan matriks M_{ij} merupakan submatriks dari matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks A.

Sifat –sifat determinan untuk A matriks persegi adalah (Susanta, 1994:37):

a) Bila tiap unsur dalam suatu baris (kolom) adalah nol maka det $(A) = 0$

b) Det $(A^t) = \det(A)$

c) Bila B diperoleh dari A dengan:
   (1) Mempertukarkan dua baris (kolom) maka det (A) = - det (A)
   (2) Mengalikan semua unsur suatu baris (kolom) dengan skalar k maka det $(B) = k$ det (A).
   (3) Setiap unsur suatu baris (kolom) dikalikan dengan skalar k lalu ditambahkan pada unsur yang sesuai pada baris (kolom) lain maka det (B) = det (A).

e. Invers

Jika A adalah matriks persegi, dan jika untuk mencari B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik *(invertible)* dan B dinamakan invers *(inverse)* dari A dengan I adalah matriks identitas. Invers suatu matriks A disimbolkan dengan A^{-1} dan memenuhi hubungan :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

Tidak semua matriks mempunyai invers, hanya matriks non singular yang mempunyai invers. Matriks non singular adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan nol, sedangkan matriks singular adalah matriks yang determinannya sama dengan nol sehingga tidak mempunyai invers.

E. Penelitian yang Relevan

Penelitian Maemunah (2019) menunjukkan bahwa transposisi didaktik dalam penyusunan desain masalah matematis nonrutin pada topik Teorema Pythagoras berhasil dilakukan dengan mengadaptasi pengalaman pemecahan masalah Analisis Real. Masalah diklasifikasikan sebagai *puzzle problems* (masalah 1 dan 2), *well-structured problems* (masalah 4 dan 5), serta ill-structured problems (masalah 3), yang menjadi dasar perancangan masalah untuk siswa. Dalam prosesnya, pengalaman peneliti dikonversi ke perspektif siswa melalui repersonalisasi dan rekontekstualisasi, dengan memprediksi langkah penyelesaian, kesulitan yang mungkin dihadapi, serta *scaffolding* yang dibutuhkan. Hasilnya menunjukkan bahwa pada set kedua, jumlah *scaffolding* yang diberikan lebih sedikit, menandakan peningkatan kemandirian siswa. Sebagian besar kesulitan siswa telah diprediksi, meskipun beberapa tidak terduga tetapi tetap dapat diatasi. Beberapa ketidaktepatan *scaffolding* ditemukan akibat kurangnya kepekaan peneliti, namun secara keseluruhan siswa mampu menyelesaikan masalah dengan baik. Studi ini menegaskan bahwa desain masalah matematis nonrutin berbasis transposisi didaktik dapat membantu siswa dalam pemecahan masalah, dengan *scaffolding* yang efektif berperan penting dalam mendukung proses pembelajaran. Kesamaan penelitian yang dilakukan oleh Maemunah dan peneliti ialah menggunakan pendekatan yang sama yaitu studi transposisional. Perbedaan pada penelitian ini dengan peneliti adalah peneliti menggunakan masalah kovariasional sedangkan peneliti tersebut menggunakan masalah non rutin.

Penelitian Zulianto & Budiarto (2020) menunjukkan bahwa siswa dapat menyelesaikan soal kontekstual pada translasi representasi visual ke representasi verbal, translasi representasi verbal ke representasi visual, translasi representasi simbolik ke representasi visual, translasi representasi verbal ke representasi simbolik, translasi representasi simbolik ke representasi verbal. Namun, kemampuan translasi representasi matematis siswa SMP dalam menyelesaikan soal kontekstual pada translasi representasi visual ke representasi simbolik tidak dapat terselesaikan dengan tepat dikarenakan kesalahan pada tahap *preliminary coordination* yang tidak dapat menentukan langkah awal yaitu titik koordinat pada grafik untuk pembentukan representasi target berdasarkan representasi sumber. Kesamaan penelitian yang dilakukan oleh Zulianto & Budiarto dan peneliti ialah menggunakan indikator kemampuan translasi representasi yang sama. Perbedaan pada penelitian ini dengan peneliti adalah peneliti menggunakan masalah kovariasional sedangkan peneliti tersebut menggunakan soal kontekstual.

Penelitian Rahmawati & Anwar (2017) menunjukkan bahwa siswa telah melakukan translasi representasi verbal ke grafik namun grafik yang dihasilkan belum tepat. Siswa belum melakukan translasi representasi verbal secara menyeluruh sehingga gambar grafik yang dihasilkan masih belum tepat. Ini menunjukkan bahwa kemampuan translasi representasi matematis verbal ke grafik siswa pada materi fungsi masih sangat kurang. Kesulitan siswa dalam melakukan translasi dari representasi verbal ke grafik karena pandangan siswa terkait pola perubahan masih bersifat diskrit. Selain itu juga kurangnya pemahaman siswa terkait masalah verbal dan terbatasnya pengalaman siswa terkait translasi representasi fungsi. Kesulitan siswa dalam translasi representasi fungsi ini akan menghambat siswa dalam mempelajari konsep kalkulus lebih lanjut. Untuk mengatasi hal tersebut guru dapat menggunakan pendekatan konsep fungsi melalui penggunaan kuantitas secara verbal yang dikenal siswa dan siswa merepresentasikan dalam bentuk grafik. Kesamaan penelitian yang dilakukan oleh Rahmawati & Anwar dan peneliti ialah menggunakan indikator translasi representasi yang sama. Perbedaan pada penelitian ini dengan peneliti adalah peneliti menggunakan masalah kovariasional sedangkan peneliti tersebut hanya terbatas pada representasi verbal dan grafik dari fungsi.

Penelitian Pratiwi dkk (2023) menunjukkan bahwa dalam menyelesaikan masalah realistik terdapat hubungan antara translasi representasi dan kemampuan numerasi. Mahasiswa tidak memenuhi indikator mengeksplorasi sumber karena hanya mampu membaca soal yang diberikan tanpa memahami maksud dari persoalan. Sehingga, mahasiswa belum memenuhi indikator kemampuan numerasi menemukan informasi statistik baik dalam bentuk numerik atau grafis pada permasalahan tidak terpenuhi. Mahasiswa tidak memenuhi indikator mengkoordinasi pemahaman awal dikarenakan belum mampu mencapai indikator tahapan mengeksplorasi sumber, belum mampu menginterpretasikan ide dan model matematika, Sehingga, mahasiswa belum memenuhi indikator menemukan informasi statistik baik dalam bentuk numerik atau grafis pada permasalahan. Mahasiswa belum memenuhi indikator mengkontruksikan tujuan target representasi dikarenakan melakukan kesalahan pemahaman konsep, kesalahan pada tahapan sebelumnya, prosedur penyelesaian, dan kesalahan proses perhitungan, Sehingga, mahasiswa belum memenuhi indikator menggunakan informasi permasalahan dalam menyelesaikan masalah baik dalam bentuk numerik atau grafis. Mahasiwa belum memenuhi indikator menentukan kesesuaian representasi hasil dikarenakan karena terdapat kesalahan pada tahapan sebelumnya maupun tidak menuliskan kesimpulan penyelesaian. Sehingga, mahasiswa belum mencapai indikator membuat keputusan tentang solusi berdasarkan proses penyelesaian masalah dalam bentuk numerik atau grafis. Kesamaan penelitian yang dilakukan oleh Pratiwi dan peneliti ialah menggunakan indikator kemampuan translasi representasi yang sama. Perbedaan pada penelitian ini dengan peneliti adalah peneliti menggunakan masalah kovariasional sedangkan peneliti tersebut menggunakan masalah realistik statistika sebagai kemampuan numerasi.